www.simiode.org
SIMIODE
A SYSTEMIC INITIATIVE FOR MODELING INVESTIGATIONS
& OPPORTUNITIES WITH DIFFERENTIAL EQUATIONS

STUDENTSKÁ VERZE

Světová populace

Lenka Přibylová, Jan Ševčík, Pavel Morcinek a Brian Winkel
Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita
Brno, Česká republika

TÉMA PROJEKTU

Úkolem je vytvořit obecný model růstu světové populace pomocí diferenciální rovnice.

Označme $N(t)$ velikost světové (lidské) populace v čase t v letech. Dále bude $r(t)$ představovat míru růstu této populace (procentuální růst populace) v čase t. Odtud dostaneme změnu velikosti světové populace za období Δt:

$$N(t+\Delta t) = N(t) + r(t) \cdot N(t) \cdot \Delta t\,. \tag{1}$$

Otázka 1. Vysvětlete slovně model (1).

Tento vztah můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = r(t) \cdot N(t)\,. \tag{2}$$

a limitním přechodem $\Delta t \to 0$ dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{dN}{dt} = r(t) \cdot N(t)\,. \tag{3}$$

Abychom zjednodušili zápis, vynecháme v zápise funkce $N(t)$ argument a budeme psát pouze N. Míra růstu $r(t)$ je neznámá fukce času t, kterou odhadneme pomocí lineární a nelineární regrese.

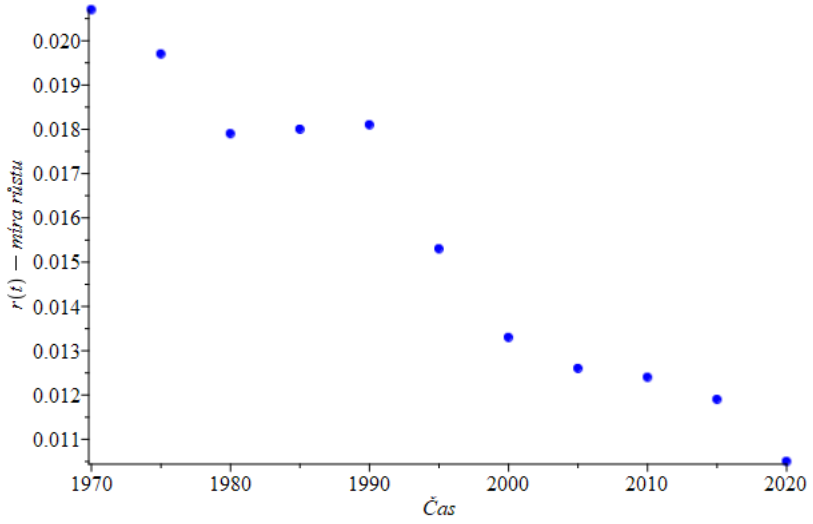
Data pro odhad míry růstu světové populace uvádí tabulka 1 a jsou zobrazena na obrázku . Pocházejí ze zdroje [1].

Otázka 2. Předpokládejme, že roční míra růstu světové populace je konstatní, řekněme r. Z dat v tabulce 1 navrhněte odhad r. Vytvořte model růstu velikosti světové populace. Jak se bude chovat do budoucna?

r_0	0.0207	0.0197	0.0179	0.0180	0.0181	0.0153
World pop	3,700,437,046	4,079,480,606	4,458,003,514	4,870,921,740	5,327,231,061	5,744,212,979
Year	1970	1975	1980	1985	1990	1995

r_0	0.0133	0.0126	0.0124	0.0119	0.0105
World pop	6,143,493,823	6,541,907,027	6,956,823,603	7,379,797,139	7,794,798,739
Year	2000	2005	2010	2015	2020

Tabulka 1. Velikost a míra růstu světové populace v čase. Zdroj [1].



Obrázek 1. Zobrazení měnící se roční míry růstu světové populace $r(t)$ vs. t (v letech).

Na základě uvedených dat můžeme také předpokládat, že míra růstu světové populace NEBUDE konstatní. Pokusíme se proto vytvořit funkci $r(t)$, která by popisovala tuto měnící se míru růstu. Z obrázku můžeme předpokládat například následující funkční předpisy:

Otázka 3. Oddůvodněte tvar pro každého ze dvou kandidátů na měnící se míru růstu světové populace $r(t)$.

(a) $r(t) = a_0 + a_1 t$,

(b) $r(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{L} + a_3\right)$.

kde $L \approx 30$ udává průměrný věk matky při narození dítěte.

Otázka 4. Ukažte, že řešením (3) je (4).

$$N(t) = N(t_0) \cdot e^{\left(\int_{t_0}^{t} r(\tau) d\tau\right)}. \tag{4}$$

Budeme předpokládat, že v roce $t_0 = 2019$ bylo na planetě Zemi 7.714 miliard obyvatel, t.j. $N(2019) =$ 7.714 miliard.

První model pro $r(t)$

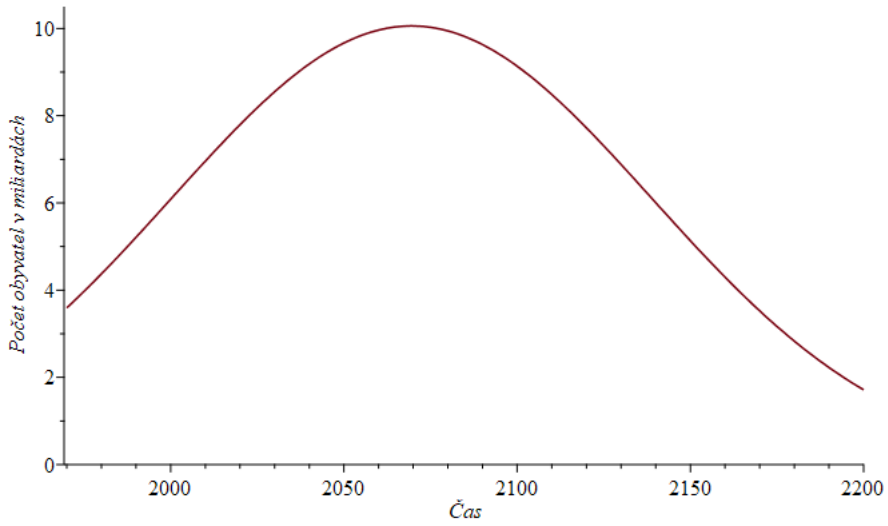
Nejprve budeme předpokládat míru růstu tvaru $r(t) = a_0 + a_1 t$.

Otázka 5. Ukažte, že pokud odhadneme míru růstu jednoduchou lineární regresí, bude populační model tvaru (5).

$$N(t) = N(t_0)\frac{e^{a_0 t + a_1 \frac{t^2}{2}}}{e^{a_0 t_0 + a_1 \frac{t_0^2}{2}}}. \tag{5}$$

Otázka 6. Pro odhad parametrů a_0 a a_1 použijte metodu nejmenších čtverců. Odhadnuté hodnoty parametrů a_0 a a_1 použijte v (5) a vykreslete model světové populace do roku 2200.

Výsledný model světové populace by měl vypadat podobně jako na obrázku 2. Také ho tak máte? Vysvětlete, co obrázek ukazuje. Je to dobrý model? Proč? Na základě obrázku 2 určete, kdy bude světová populace dosahovat maxima.



Obrázek 2. Vykreslení odhadu světové populace pro míru růstu (a) $r(t) = a_0 + a_1 t$ s nejlepšími odhady hodnot a_0 a a_1.

Druhý model pro $r(t)$

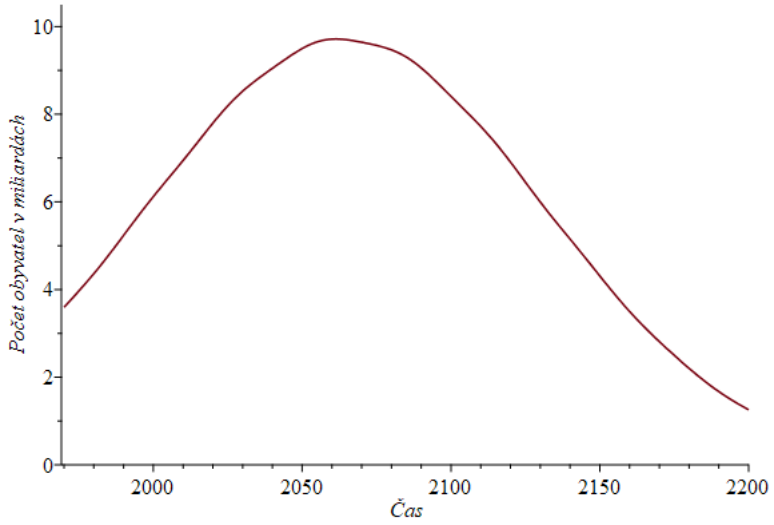
V druhém modelu budeme předpokládat, že $r(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{L} + a_3\right)$.

Otázka 7. Ukažte, že pokud odhadujeme míru růstu světové populace touto složitější funkcí $r(t)$, pak je populační model tvaru (6).

$$N(t) = N(2019)\mathrm{e}^{\frac{-30\,a_2\,\cos\left(\frac{1}{15}\,\pi\,t + a_3\right) - 30\,a_2\,\sin\left(\frac{\pi}{10} + a_3\right) + \pi\,(t-2019)(a_1\,t + 2\,a_0 + 2019\,a_1)}{2\pi}}. \tag{6}$$

Otázka 8. K odhadu parametrů a_0, a_1, a_2, a a_3 použijte metodu nejmenších čtverců. Získané odhady parametrů a_0, a_1, a_2, and a_3 použijte v (6) a vykreslete model světové populace do roku 2200.

Výsledný model světové populace by měl vypadat podobně jako na obrázku 3. Také ho tak máte? Vysvětlete, co obrázek ukazuje. Je to dobrý model? Proč? Na základě obrázku 3 určete, kdy bude světová populace dosahovat maxima.



Obrázek 3. Vykreslení odhadu světové populace pro míru růstu (b) $r(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{L} + a_3\right)$ s nejlepšími odhady hodnot a_0 a a_1.

Otázka 9. Pokuste se navrhnout jiné funkce $r(t)$ a oddůvodnit svůj návrh. Použijte svůj návrh k podobné analýze a predikci velikosti světové populace.

Otázka 10. Vykreslete a porovnejte nakonec predikce budoucí světové populace pro všechny čtyři modely založené na různých $r(t)$: konstantní míra růstu, model (a), model (b) a poslední vámi navržený model. Co si myslíte o budoucnosti světové populace na základě těchto analýz?

Další modely

Uvažujme také další modely pro $r(t)$:

(c) $r(t) = a_0 + a_1 \cdot N(t)$, logistický model,
(d) $r(t) = a\left(\frac{N(t)}{A} - 1\right)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$, model s Alleeho efektem.

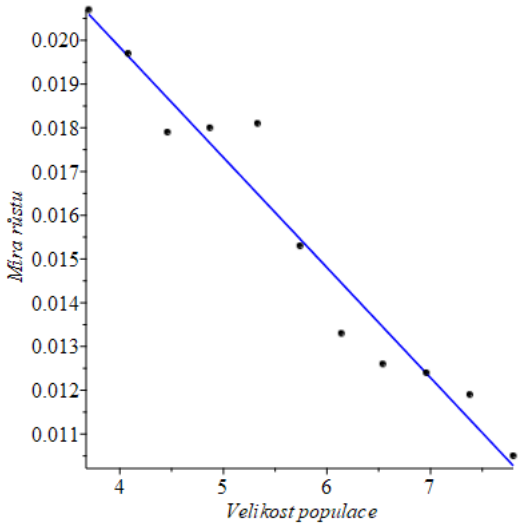
Model (c), logistický model, je model, ve kterém $r(t) = r(N(t)) = a_0 + a_1 \cdot N(t)$ je růstový koeficient funkcí velikosti populace $N(t)$. Dostáváme tak model světové populace ve tvaru (7):

$$\frac{dN}{dt} = r(t) \cdot N(t) = (a_0 + a_1 \cdot N(t)) \cdot N(t)\,. \tag{7}$$

Otázka 11. Poté co substitucí z modelu (c) $r(t) = a_0 + a_1 \cdot N(t)$ do diferenciální rovnice (3) dostanete konkrétní logistický model, vyřešte tuto rovnici pro funkci $N(t)$ a ověřte, že dostanete:

$$N(t) = \frac{0,00002284080266}{1,748185649 \cdot 10^{20}\,\mathrm{e}^{-0,02990992151\,t} + 0,000001922576988}. \tag{8}$$

Otázka 12. Funkci růstového koeficientu $r(t) = a_0 + a_1 \cdot N(t)$ můžeme odhadnout pomocí lineární regrese z dat v tabulce 1. Zkuste to a ukažte, že nejlepší odhad koeficientů je $a_0 = 0,0293993$ a $a_1 = -0,00245444$.

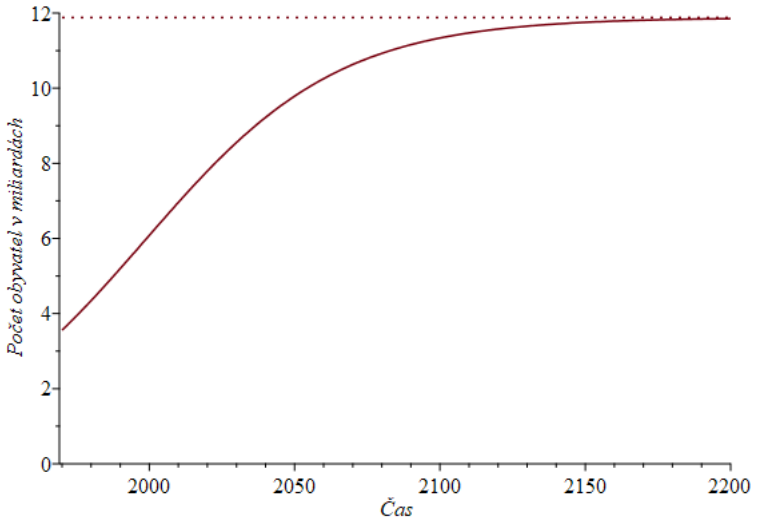


Obrázek 4. Vykreslení odhadu míry růstu (c) $r(t) = a_0 + a_1 N(t)$ s nejlepšími odhady hodnot a_0 a a_1.

Otázka 13. Ukažte, že se velikost světové populace lidí „ustálí“ na 11,8 miliardách.

Pro tento model populace nebude nikdy klesat, protože jsme zvolili klesající funkci $r(N(t))$ (lineární) a proto čím bude velikost populace vyšší, tím pomaleji poroste. Čím menší je koeficient růstu, tím menší je růst populace, tedy růst bude zpomalovat, ale nikdy zcela neustane. Takový model může sloužit například k odhadu kapacity prostředí, v tomto případě okolo 11,8 miliard lidí.

Nyní se budeme zabývat posledním modelem (d). Poprvé popsal tento model v roce 1930's Warder Clyde Allee a podle něj je pojmenován. Allee na experimentálních studiích ukázal, že růst populace karase zlatého je rychlejší, když je v rezervoáru více jedinců [4]. Vyvodil z toho, že agregace



Obrázek 5. Vykreslení odhadu světové populace pro míru růstu (c) $r(t) = a_0 + a_1 N(t)$ s nejlepšími odhady hodnot a_0 a a_1.

jednotlivců může zvýšit míru přežití populace a že spolupráce může hrát podstatnou úlohu v celkovém vývoji sociální struktury populace. V modelu s Alleeho efektem je a přirozená míra růstu populace, K je kapacita prostředí a A je kritická nebo Alleeho prahová hodnota.

Dočteme se, že: „Tento graf je příkladem silného Alleeho efektu, kde má populace zápornou hodnotu míry růstu pro $0 < N(t) < A$ a tudíž může dojít k vyhynutí, kladnou míru růstu pro $A < N(t) < K$ (předpokládáme $0 < A < K$). V případě slabého Alleeho efektu je růst populace pod určitým prahem pouze zpomalen v tempu růstu. Alleho efekt je dobře pozorován u malých populací, protože populace nad touto hranicí už vykazují spíše logistický růst. Protože měřená velikost světové populace nikdy nebyla pod takto nízkým prahem, neexituje žádný výzkum, který by se zabýval dopadem Alleeho efektu na světovou populaci, ale Alleeho efekt byl pozorován pro mnoho druhů, hlavně zvířat, která jako skupina loví kořist nebo se brání proti predátorům.“[3]

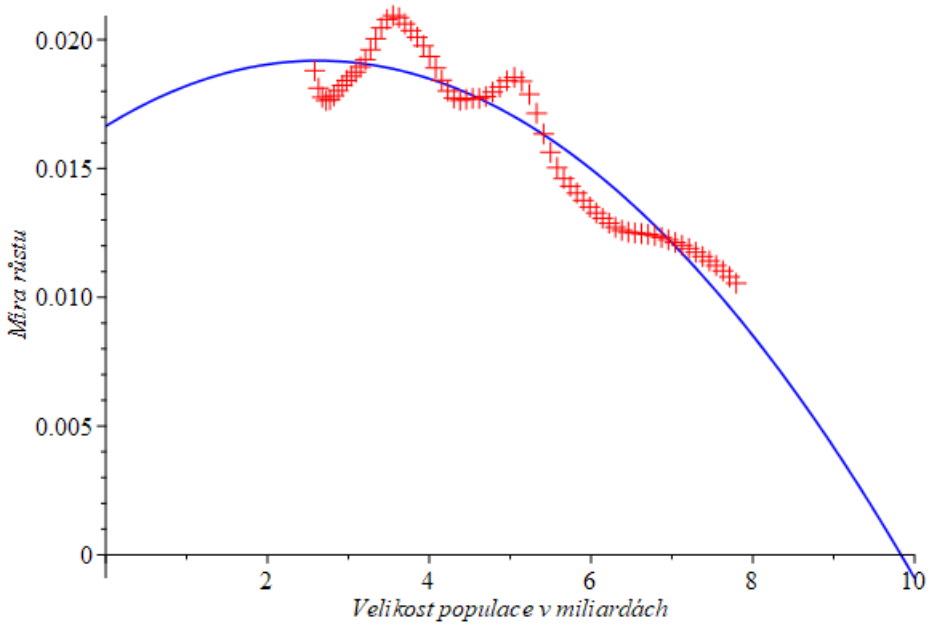
Z matematického pohledu jde ovšem o odhad $r(N)$ jako kvadratické funkce proměnné N, který můžeme udělat i z dat za touto hranicí[1]. Pro takový odhad je dat v tabulce 1 příliš málo a je třeba použít všech 70 měření velikosti světové populace od roku 1951 do roku 2020. Tato data lze nalézt na [2]. Kvadratický odhad míry růstu $r(N)$, pak dává světový model populace tvaru

$$\frac{dN}{dt} = a\left(\frac{N(t)}{A} - 1\right)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \cdot N(t)\,. \tag{9}$$

Otázka 14. Funkci růstového koeficientu $r(t) = a_0 + a_1 \cdot N(t) + a_2 \cdot (N(t))^2$ můžeme odhadnout pomocí lineární regrese z dat na [2] nebo v souboru population.xlsx. Zkuste to a ukažte, že nejlepší

[1]Touto hranicí je hodnota, ve které má parabola své maximum.

odhad koeficientů je $a_0 = 0.016645$, $a_1 = 1.938243 \cdot 10^{-12}$ a $a_2 = -3.693209 \cdot 10^{-22}$. Porovnejte váš výsledek s obrázkem 7.



Obrázek 6. Vykreslení odhadu pro míru růstu $r(t) = a_0 + a_1 \cdot N(t) + a_2 \cdot (N(t))^2$ s nejlepšími odhady hodnot a_0, a_1 a a_2.

Otázka 15. Poté co substitucí z modelu (c) $r(t) = a_0 + a_1 \cdot N(t) + a_2 \cdot (N(t))^2$ do diferenciální rovnice (9) dostanete konkrétní model. Použijte numerickou metodu k odhadu řešení $N(t)$ s počáteční podmínkou $N(2019) = 7.714$ a ověřte, že dostanete graf 7.

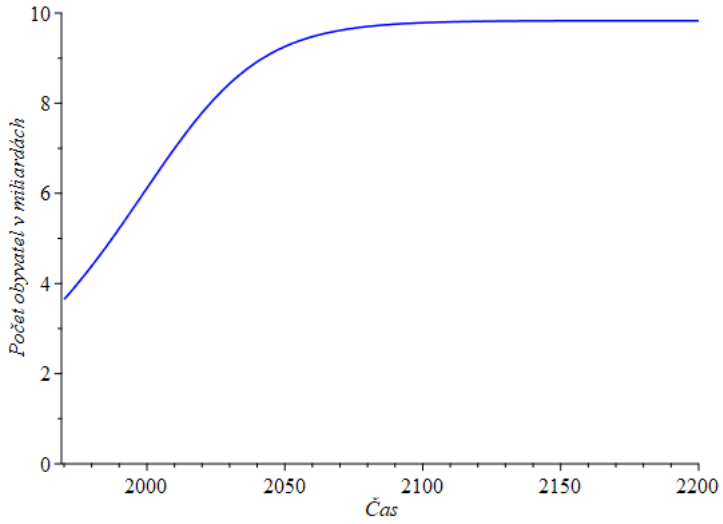
Otázka 16. Ukažte, že pro tento model (d) se velikost světové populace lidí „ustálí“ na 9,83 miliardách.

Reference

[1] Current World Population. https://www.worldometers.info/world-population, přístup 24. 1. 2020.

[2] World Population by Year. , přístup 24. 1. 2020.

[3] Project Rhea. 2020. Logistic Models. https://www.projectrhea.org/rhea/index.php/Logistic_Models, přístup 28. 1. 2020.



Obrázek 7. Vykreslení odhadu světové populace pro míru růstu (d) $r(t) = a_0 + a_1 \cdot N(t) + a_2 \cdot (N(t))^2$ s nejlepšími odhady hodnot a_0, a_1 a a_2.

[4] Wikipedia contributors. (2020, January 25). Allee effect. In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Allee_effect&oldid=937563935, přístup 28. 1. 2020.